http://math.uni.lu/parlier/ hugo.parlier@uni.lu

EXERCICES 3 A

1. Utiliser une récurrence pour montrer que

$$|a_1 + a_2 + \cdots + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|.$$

pour $n \geq 2$ entier.

2. Démontrer que si $a > 0$ alors il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{1}{n} < a < n$.

3. Montrer que si $a, b \in \mathbb{R}$ et que $a \leq b_1$ pour tout $b_1 > b$, alors $a \leq b$.

4. Soit $a, b \in \mathbb{R}$. Montrer que si $a \leq b + \frac{1}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ alors $a \leq b$.

5. Soit E un ensemble et $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E. Montrer que $\mathcal{P}(E)$ muni de la différence symétrique Δ et de l'intersection $\cap$ est un anneau commutatif.

6. Montrer, pour $a \in \mathbb{Q}$, que $a_{\mathbb{R}} = \{x \in \mathbb{Q} : x < a\}$ est une coupure de Dedekind.

7. Pour $a, b \in \mathbb{Q}$ montrer que $(a + b)_{\mathbb{R}} = a_{\mathbb{R}} + b_{\mathbb{R}}$.